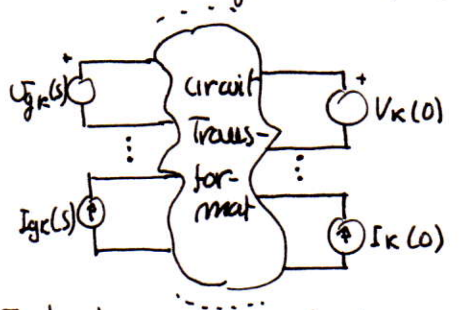
3. DINÀMICA DE CIRCUITS LINEALS

En aquest tema estudiarem amb més profunditat la resposta dels circuits, i veurem que a vegades no cal conèixer-ho tot, que coneixent alguns aspectes, ja podem saber força com serà la resposta. Per exemple diferenciarem els termes deguts a l'entrada i a les condicions inicials. Veurem també que podem saber si un circuit és estable o no abans de saber la resposta, encara en el domini transformat.

3.1. RESPOSTA ZERO-STATE, ZERO-INPUT, LLIURE I FORÇADA

Amb tot el què hem vist fins ara, podem dir que en el circuit transformat podem trobar diferents tipus de fonts: fonts externes (fonts de senyal) i fonts que ens apareixen i són degudes a les condicions inicials dels condensadors i les bobines.

Pensant en general, d'una manera abstracta, podem dir:



Fonts de senyal (termes en s) : Fonts de C.I Ct. (no té s)

El circuit estarà descrit per una matriu com la següent:

$$[\,T\,][\,V\,] = [\,W\,]$$

Incògnites (V) — Dades (W): totes les fonts
- de senyal
- de C.I.

Qualsevol variable de sortida, v_0 o i_0, que vulguem buscar, es podrà escriure com a combinació lineal de totes les fonts. Així tindríem:

$$\left.\begin{matrix}V_0(s)\\I_0(s)\end{matrix}\right\} = \sum \frac{A_K(s)}{\Delta(s)} \overbrace{\left\{\begin{matrix}V_{gK}(s)\\I_{gK}(s)\end{matrix}\right\}}^{\text{Fonts de senyal}} + \sum \frac{B_K(s)}{\Delta(s)} \overbrace{\left\{\begin{matrix}V_K(0)\\I_K(0)\end{matrix}\right\}}^{\text{Fonts de C.I.}}$$

Δ = Determinant de la matriu $|T|$

El denominador sempre serà el determinant de T. A vegades caldrà arreglar-lo una mica si ens queda algun s^{-1}. En qualsevol cas, sempre tindrem un polinomi amb s, i serà el mateix per tots els termes.

Al numerador també hi apareixeran termes amb s, però ara, tots els polinomis seran diferents. Recordem que, al resoldre el sistema, el numerador depèn de la variable que busquem (en el determinant, posem la columna dels termes independents a la columna de la variable que busquem).

Partint de l'expressió anterior, podrem donar les següents definicions:

→ Resposta ZERO-STATE: sortida quan el circuit no té condicions inicials (sistema inicialment en repòs)

→ Resposta ZERO-INPUT: sortida quan al circuit no hi ha entrades (només hi ha condicions inicials).

Amb aquestes definicions podem dir:

$$\left.\begin{matrix} V_o(s) \\ I_o(s) \end{matrix}\right\} = \sum \frac{A_k(s)}{\Delta(s)} \left\{\begin{matrix} V_{gk}(s) \\ I_{gk}(s) \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} V_o(s) \\ I_o(s) \end{matrix}\right\} = \sum \frac{B_k(s)}{\Delta(s)} \left\{\begin{matrix} V_k(0) \\ I_k(0) \end{matrix}\right\}$$

Resposta ZERO-STATE — Resposta ZERO-INPUT

3.1.1. UN TERME DE LA RESPOSTA ZERO-INPUT

Anem a estudiar primer la resposta ZERO-INPUT fixant-nos en un sol dels termes:

$$\frac{B_k(s)}{\Delta(s)} \cdot \left\{\begin{matrix} V_k(0) \\ I_k(0) \end{matrix}\right\} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

↳ són membres reals i sense s.

Com que hem dit que cada terme tindria un polinomi amb s al numerador i un altre al denominador, i les condicions inicials no tenen s, podríem dir que tindrem un quocient de polinomis i el denominador ($D(s)$) el podríem escriure:

$$(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)$$

on p_i serien les seves arrels i podrien ser complexes.

Tal com hem anat veient en els exemples vists fins ara, el què faríem en aquest cas és descomposar en fraccions simples i podríem escriure:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s-p_i}$$

Si aquesta expressió la volem passar al domini temporal, la seva transformada inversa seria:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, e^{p_i \cdot t} \cdot u(t)$$

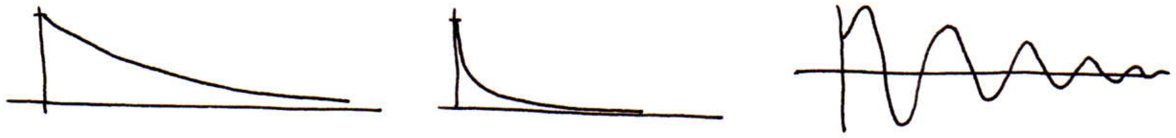
Posem un cas numèric concret per poder entendre-ho millor:

$$\left[\underset{\text{depenen de les C.I}}{3} \cdot e^{\overset{\uparrow}{-2}t} + \underset{}{2} \cdot e^{\overset{\uparrow}{-1}\cdot t}\right] \cdot u(t)$$

depenen de les C.I (3 i 2); són arrels del polinomi del determinant (−2 i −1).

La forma d'aquesta resposta depèn del determinant de [T], per tant només depèn del circuit i no dels senyals d'entrada. N'hi direm <u>resposta lliure</u>.

Així doncs, la forma d'aquesta resposta només podrà ser exponencial si les arrels són reals i exponencial per sinusoide si les arrels són complexes.



L'amplitud d'aquests senyals dependrà de les condicions inicials. Si no n'hi haguessin serien zero.

Això és el què passa a un terme qualsevol. Com que la forma depèn de les arrels del polinomi del denominador, que depèn del determinant, i serà igual per tots, vol dir que tots els termes tindran la mateixa forma, a no ser que un terme es cancel·li ($C_i = 0$).

3.1.2. UN TERME DE LA RESPOSTA ZERO-STATE

Estudiem ara la resposta ZERO-STATE, fixant-nos també en un sol dels termes.

$$\frac{A_K(s)}{\Delta(s)} \left\{ \begin{matrix} V_{gK}(s) \\ I_{gK}(s) \end{matrix} \right\} = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_e(s)}{D_e(s)}$$

Veiem que el denominador $\Delta(s)$ serà el mateix que abans, ja que depèn del determinant del sistema. En qualsevol cas ho podrem escriure com a fracció de polinomis. Les fonts també seran fraccions de polinomis, depenent del senyal en el domini temporal podrien ser:

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s+1}, \quad \frac{s}{s^2+1}, \quad \frac{1}{s^2+1} \quad \dots$$

En qualsevol cas, cada polinomi del denominador es podrà desglossar en funció de les seves arrels, podent escriure una expressió com:

$$\frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_e(s)}{D_e(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n} (s-p_i)} \cdot \frac{N_e(s)}{\prod_{i=1}^{m} (s-q_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-p_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{s-q_i}$$

Si fer la transformada inversa, trobarem els següents senyals:

$$\left[\sum a_i e^{p_i t} + \sum b_i e^{q_i t} \right] u(t)$$

Veiem que hem trobat dos tipus de termes:

$\sum a_i e^{p_i t} \cdot u(t)$ → La forma depèn del circuit, no de les fonts, per tant és <u>resposta lliure</u>.

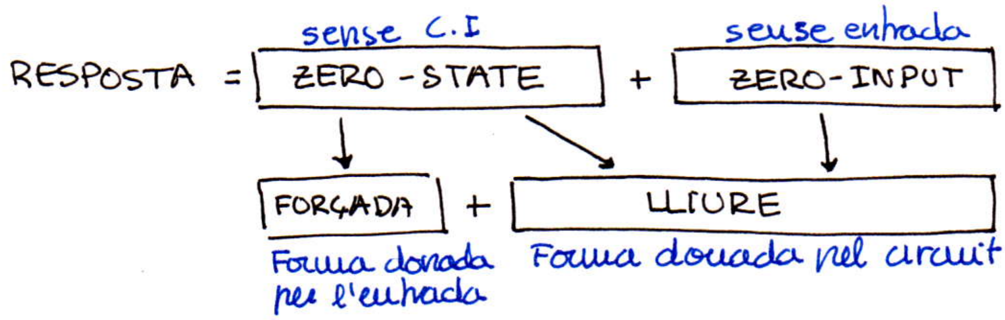
$\sum b_i e^{q_i t} \cdot u(t)$ → La forma depèn de les fonts d'entrada, no del circuit. En diem <u>resposta forçada</u>.

Veiem que té una part de termes que són de resposta lliure. Aquests tenen la mateixa forma que els trobats abans per la resposta ZERO-INPUT. A part, veiem que cadascuna de les fonts de senyal produirà una resposta forçada

3.1.3. RESPOSTA GLOBAL

Així doncs, veiem que la resposta global està formada per diversos termes pertanyents a la resposta ZERO-INPUT (només té termes de resposta lliure) i a la resposta ZERO-STATE (té termes tant de resposta lliure com forçada).

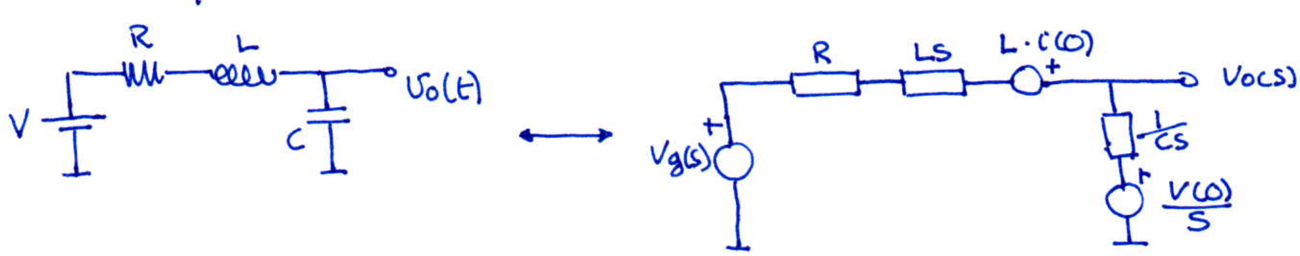
Ho podem esquematitzar de la següent manera:



De moment sembla una mica abstracte, però estructurat d'aquesta manera, ens ajudarà a preveure el resultat abans. Veiem-ho més concretament amb un exemple:

EXEMPLE:

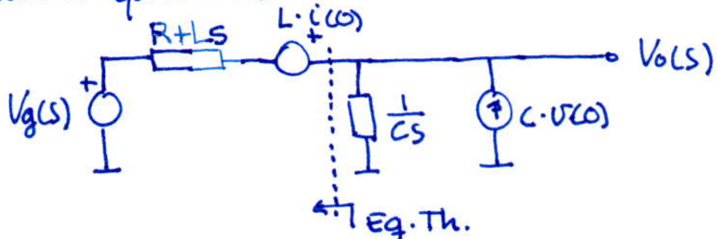
Estudiem el següent circuit (semblant al de la pràctica). Suposem que té condicions inicials:



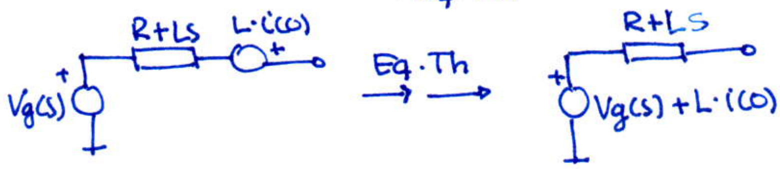
Al transformar el condensador hem posat la seva forma Thevenin. Si ho passem a Norton, no tindrem s a les C.I.

$$\frac{v(0)/s}{1/Cs} = C\cdot v(0)$$

Amb aquesta transformació el circuit també tindrà menys nodes i quedarà:

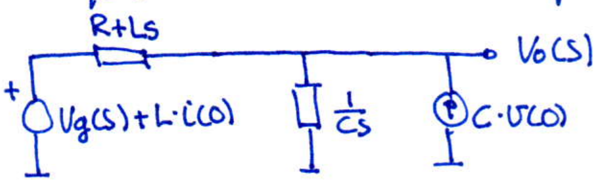


Recordem que si v(t)=V=ct, la seva transformada serà V/s. De moment deixem encara Vg(s).



Si canviem la primera part del circuit pel seu equivalent Thevenin ens estalviem un node.

Amb aquest canvi el circuit quedaria:



Tenim només un node desconegut, així que plantejarem un sol KCL.

$$\frac{Vo(s) - [Vg(s) + L\cdot i(0)]}{R+Ls} + Cs\cdot Vo(s) = C\cdot v(0)$$

Traiem el denominador i ens quedarà:

$$Vo(s) - Vg(s) - L\cdot i(0) + (RCs + LCs^2)\cdot Vo(s) = (RC + LCs)\cdot v(0)$$

$$[1 + RCs + LCs^2]\, Vo(s) = Vg(s) + L\cdot i(0) + (RC + LCs)\cdot v(0)$$

Arreglem aquesta equació intentant separar tots els termes deguts a fonts (siguin l'entrada o c.i.).

$$Vo(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}\, Vg(s) + \frac{L}{LCs^2 + RCs + 1}\, i(0) + \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}\, v(0)$$

Arreglem aquesta expressió com sempre, deixant el terme de major grau del denominador amb coeficient 1.

$$Vo(s) = \underbrace{\underbrace{\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\, Vg(s)}_{①}}_{\text{ZERO-STATE}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\frac{1}{C}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\, i(0)}_{②} + \underbrace{\frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\, v(0)}_{③}}_{\text{ZERO-INPUT}}$$

De moment veiem que tenim 1 bloc ZERO-STATE (degut a la font d'entrada) i 2 blocs ZERO-INPUT (deguts a les condicions inicials de bobina i condensador). De moment tots tenen el mateix denominador. Deixarà de ser així quan posem el valor de $V_g(s) = \frac{A}{s}$.
Les arrels d'aquest polinomi del denominador (igual per tots) ens marcarà la forma de la resposta lliure.
Posem ara els valors dels components i busquem les arrels del polinomi, després ja posarem el valor de $V_g(s)$.

$R = 200\,\Omega$, $L = 50\,mH$, $C = 1\,\mu F$
Amb aquests valors trobem:

$$\frac{R}{L} = \frac{200}{5\cdot 10^{-2}} = 4000 \quad , \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-6}} = 2\cdot 10^{7}$$

Així el polinomi quedaria:

$$s^2 + 4\cdot 10^3 s + 2\cdot 10^7$$

Les arrels seran:

$$\frac{-4\cdot 10^3 \pm \sqrt{16\cdot 10^6 - 4\cdot 1\cdot 2\cdot 10^7}}{2} = \frac{-4\cdot 10^3 \pm \sqrt{16\cdot 10^6 - 80\cdot 10^6}}{2} = -2\cdot 10^3 \pm j4\cdot 10^3$$

Com que sabem que les arrels del denominador són els exponents de l'exponencial quan fem la transformada inversa, de moment, sense fer més càlculs, ja podem predir quina serà la forma de la resposta lliure (ens faltarà només calcular amb més detall l'amplitud i la fase, que també dependrà del numerador).
Aquesta forma de la resposta lliure serà:

$$e^{(-2\cdot 10^3 + j(4\cdot 10^3))t} = e^{-2\cdot 10^3 t} \cdot e^{j4\cdot 10^3 t}$$

$$e^{(-2\cdot 10^3 - j(4\cdot 10^3))t} = e^{-2\cdot 10^3 t} \cdot e^{-j4\cdot 10^3 t}$$

Aquestes dues expressions vindran sumades i amb una amplitud i fase concretes que de moment encara no coneixem. Així quedaria:

$$A\, \underbrace{e^{-2\cdot 10^3 t}} \cdot \cos(\underbrace{4\cdot 10^3}\, t + \theta)$$

Ve determinat pel circuit.

A i θ les haurem de calcular, perquè depenen d'altres coses.

De moment ja hem vist la forma del circuit. Ara podem estudiar cadascun dels termes per separat. Veurem que el corresponent a la resposta ZERO-STATE, té una arrel més deguda a l'excitació $\frac{1}{s}$.

En base al què hem vist de la resposta lliure, veiem ara la forma que tindria cadascun dels termes:

$$① \rightarrow \frac{2\cdot 10^7}{s^2+4\cdot 10^3 s+2\cdot 10^7}\cdot\frac{V}{s} \rightarrow \left[a_1 e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot\cos(4\cdot 10^3 t+\varphi_1)+b_1\cdot u(t)\right]\cdot u(t)$$

$$② \rightarrow \frac{10^6}{s^2+4\cdot 10^3 s+2\cdot 10^7}\cdot i(0) \rightarrow \left[a_2 e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot\cos(4\cdot 10^3 t+\varphi_2)\right]u(t)$$

$$③ \rightarrow \frac{s+4\cdot 10^3}{s^2+4\cdot 10^3 s+2\cdot 10^7}\cdot v(0) \rightarrow \left[a_3 e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot\cos(4\cdot 10^3 t+\varphi_3)\right]u(t)$$

Per trobar exactament les amplituds i les fases, caldria que trobéssim els residus i els poséssim en forma polar. Per això, podem utilitzar l'Octave. Per trobar els residus utilitzarem la funció "residue". Ens donaran números complexes que haurem de passar a forma polar. Per trobar el mòdul es pot fer amb la funció "abs" i per trobar la fase amb "angle". La fase la dóna sempre amb radiants, si interessa més saber l'angle amb graus, s'ha de buscar a mà.

Analitzant amb detall a resposta ZERO-STATE:

$$\frac{2\cdot 10^7}{s^3+4\cdot 10^3 s^2+2\cdot 10^7 s}=\frac{A}{s-(-2\cdot 10^3+j4\cdot 10^3)}+\frac{A^*}{s-(-2\cdot 10^3-j4\cdot 10^3)}+\frac{B}{s-0}$$

Ho hem posat així perquè sabem que per arrels complexes conjugades trobarem també residus conjugats.

En forma polar podem escriure A i A^* com:

$A=|A|\cdot e^{j\varphi}$ i $A^*=|A|\cdot e^{-j\varphi}$

Amb això la transformada inversa seria:

$$A e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot e^{j4\cdot 10^3 t}+A^* e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot e^{-j4\cdot 10^3 t}+B\,u(t)$$

$$|A|e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j4\cdot 10^3 t}+|A|e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot e^{-j\varphi}\cdot e^{-j4\cdot 10^3 t}+B\cdot u(t)$$

$$2|A|\cdot e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot\cos(4\cdot 10^3 t+\varphi)+B\cdot u(t)$$

Utilitzant el Octave trobaríem que:

$A=-0'5-j0'25 \rightarrow A=0'56\cdot e^{-j153°}$ $\quad$ $B=1$

$A^*=-0'5+j\cdot 0'25 \rightarrow A^*=0'56\cdot e^{j\cdot 153°}$ $\quad$ Hem suposat $V=1$, sinó $B=V$

Així la resposta ZERO-STATE (sense condicions inicials) seria:

$$v(t)=\left[1'12\cdot e^{-2\cdot 10^3 t}\cdot\cos(4\cdot 10^3 t-153°)+1\right]\cdot u(t)$$

Si donem valors veuríem que per $t=0$, $1'12\cdot\cos(-153°)=-1 \Rightarrow v_0(t)=0$

Això ja és correcte, ja que la tensió al condensador ha de ser 0 a l'inici, i no pot canviar bruscament.

3.2. FUNCIÓ DE XARXA

La majoria de sistemes interessants que coneixem (com per exemple un amplificador d'àudio) tenen una entrada (una sola) i una sortida. En moltes ocasions seria interessant trobar la seva relació, però sovint ens trobem que hi ha altres fonts degudes a les condicions inicials.

Recordem que les condicions inicials s'extingeixen relativament ràpid. En moltes ocasions els equips o sistemes funcionen molta estona, amb la qual cosa les condicions inicials (que afectarien durant poc temps), no són importants per veure el comportament d'un circuit. Sí que ho seran, en canvi en circuits commutats (que tenen interruptors).

En els casos que les c.i. no són importants, podem definir la funció de xarxa (network function) de la següent manera:

$$H(s) = \left.\frac{V_o(s)}{V_i(s)}\right|_{c.i=0}$$

Si només tenim una entrada, tindrem un sol terme en funció de Vi i altres en funció de les c.i. Si aquestes les fem nul·les, tindrem la funció de xarxa.

Un cop coneguda la funció de xarxa, podrem calcular la sortida per qualsevol entrada fent:

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

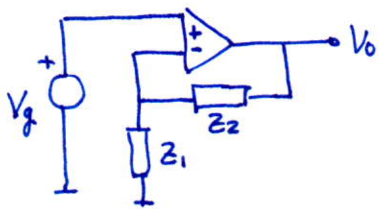
Haurem de fer aquesta operació en el domini de s, ja que en el temps no es complex $v_o(t) = h(t) \cdot v_i(t)$. A l'assignatura de matemàtiques veurem que en el temps hauríem de fer: $v_o(t) = h(t) * v_i(t)$ (que és el producte de convolució).

Així doncs, si nosaltres coneixem H(s), ja ho sabrem tot del circuit, ja que caracteritza el sistema, i podrem conèixer la sortida per qualsevol entrada:

$$V_i(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow V_o(s)$$

Vegem-ho amb un exemple concret.

EXEMPLE:



coneixem aquest circuit i sabem que és un amplificador no inversor. Per tant ja sabem que:

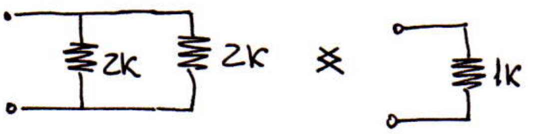
$$V_o(s) = \left[1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right] V_g(s)$$

Per tant la funció de xarxa seria:

$$H(s) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$V_g(s) \longrightarrow \boxed{H(s) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \longrightarrow V_o(s)$$

Es pot donar el cas que tinguem circuits molt diferents, però que, en canvi, tinguin la mateixa funció de xarxa. Si es dóna aquest cas, els podrem substituir l'un per l'altre, seran equivalents. (cal vigilar sempre què passa amb les alimentacions).



Són equivalents. Des de fora serien indestingibles.

3.2.1. FORMA I DESCRIPCIÓ

Anem a veure més en detall com seria la funció de xarxa i quina informació en podríem extreure sobre el circuit.
Partim de la base que la funció de xarxa (tal com hem anat veient fins ara), serà un quocient de polinomis:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Podríem també buscar les arrels d'ambdós polinomis i desglossar-ho en factors de la següent manera:

$$H(s) = H_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

H_0 serà a_m

n (que és el grau del denominador) és l'ordre del circuit. Aquest valor és igual o menor que el nombre d'elements dinàmics que té el circuit (si tenim 2 condensadors, tindrem com a molt $n=2$ o menor).
m és el grau del numerador i serà com a molt igual que el del denominador, (no major) i normalment serà menor.

- z_i són els zeros de $H(s)$ i són els valors que fan que $H(s)$ valgui zero: $H(z_i)=0$
- p_i són els pols de $H(s)$ i són els valors que fan que $H(s)$ valgui infinit: $H(p_i)=\infty$.

El circuit està caracteritzat per aquests polinomis $N(s)$ i $D(s)$, per tant també ho estarà pels pols i zeros de $H(s)$.

En anglès la nomenclatura seria:

pol → pole (que vindria a ser pal)

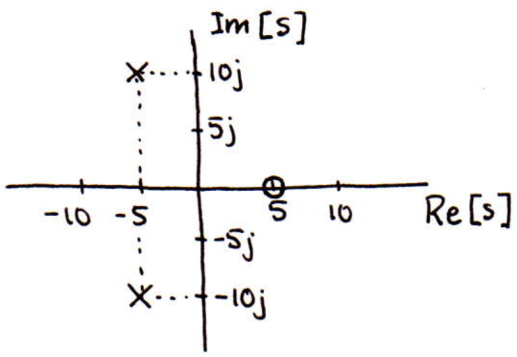
zero → zero

Els pols i zeros es podran representar en un pla. Vegem-ho per un cas concret.

$$H(s)=\frac{s-5}{s^2+10s+125}=\frac{s-5}{[s-(-5+10j)]\cdot[s-(-5-10j)]}$$

En aquest cas veiem que $H_0=1$.

Podem, ara, representar gràficament els pols i zeros en un pla (ho anomenarem diagrama de pols i zeros).



El circuit també queda representat per aquest pla.

És un pla complexe on representarem:

pols X

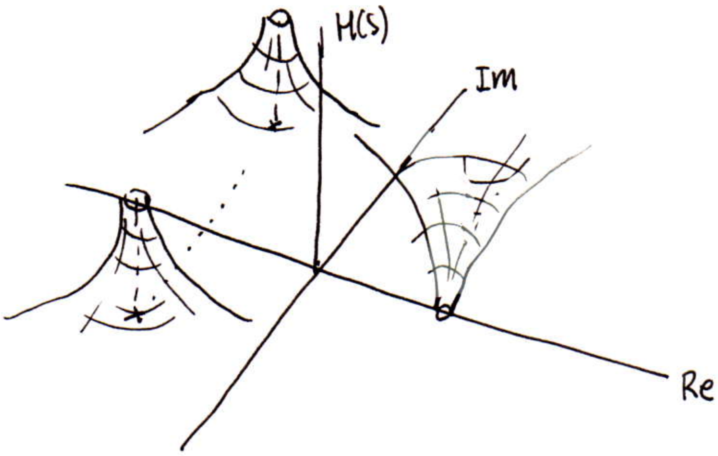
zeros O

Anirem veient que amb aquest diagrama podrem saber moltes coses del circuit.

Si volíssim representar $H(s)$, ho hauríem de fer en 3D. Seria com agafar una lona on posem un pal en els pols que l'aguanten i clavar la lona al terra amb una xinxeta en els zeros.

D'aquesta manera tindríem un gràfic com el de la pàgina següent.

Com que $H(s)$ està definida per C.I. nul·les, tindrem només la resposta ZERO-STATE. Per aquesta haurem de buscar la resposta lliure i forçada.



3.2.2. RESPOSTA LLIURE I FORÇADA

De moment hem buscat com seria $H(s)$:

$$H(s) = H_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \qquad i \qquad H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Si volem buscar la sortida haurem de fer:

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

L'entrada també serà un quocient de polinomis, de manera que tindrem:

$$V_i(s) = \frac{N_e(s)}{D_e(s)} \Rightarrow V_o(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \cdot \frac{N_e(s)}{\prod_{j=1}^{q}(s-q_j)}$$

Ja sabem que aquestes expressions es podrien descomposar en fraccions simples de la següent manera:

$$V_o(s) = \underbrace{\frac{a_1}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{a_n}{(s-p_n)}}_{\text{RESPOSTA LLIURE}} + \underbrace{\frac{b_1}{(s-q_1)} + \cdots + \frac{b_q}{(s-q_q)}}_{\text{RESPOSTA FORÇADA}}$$

Veiem que la funció de xarxa ens proporciona la resposta lliure del circuit.

3.2.3. FORMA DE LA RESPOSTA LLIURE

Anem a veure ara quina forma tindrà la resposta lliure en funció de la situació dels pols. De fet, per la forma només afectaran els pols. Recordem que aquests apareixen a la transformada inversa a l'exponencial i, si és el cas, al cosinus, de manera que ens marcaran la τ i la freqüència. Els zeros no afecten a la forma, només a l'amplitud dels senyals.

Recordem que donat un pol p_i :

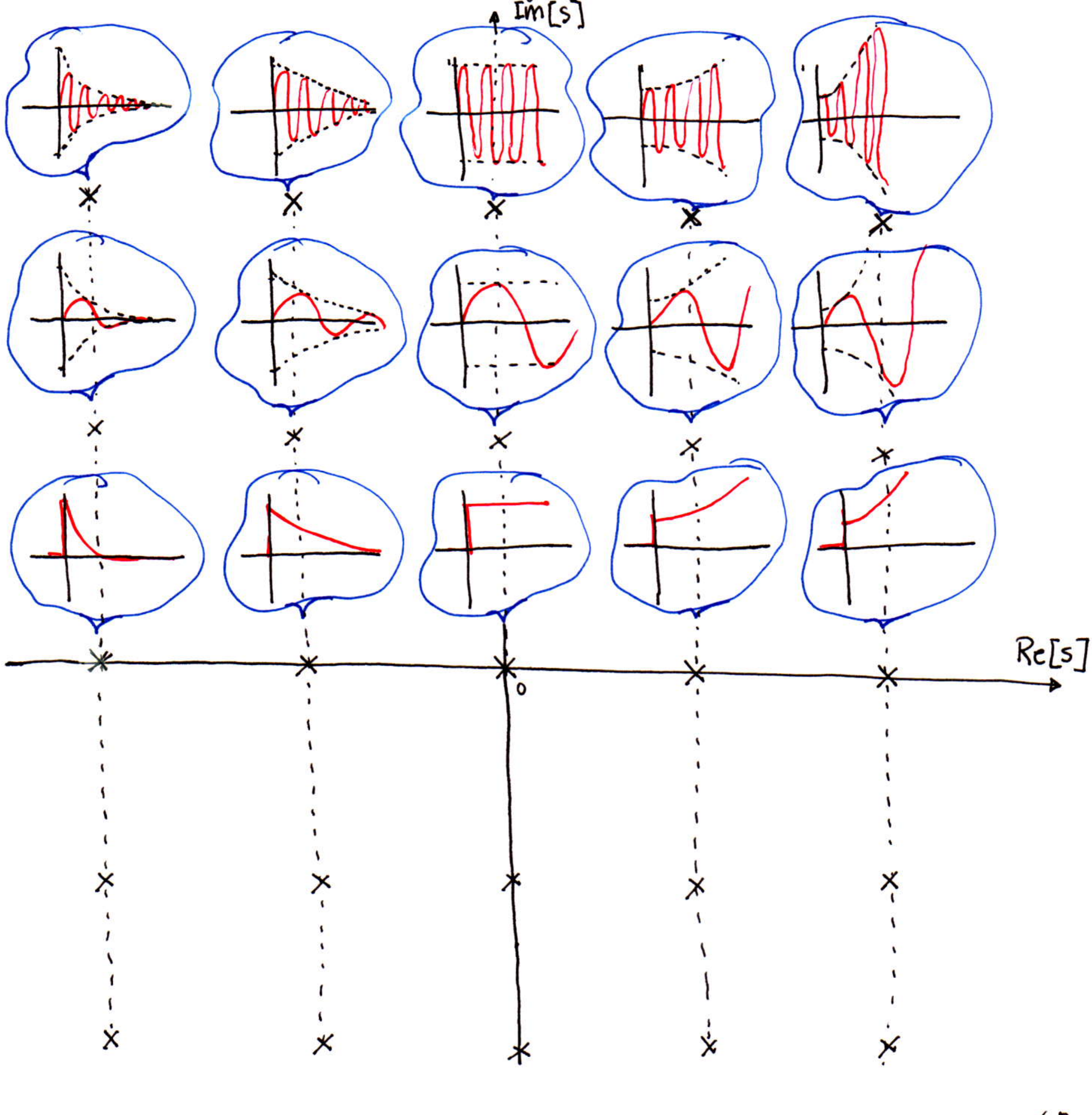
$\tau = \frac{1}{Re[p_i]}$ si $Re[p_i] \uparrow\uparrow \Rightarrow \tau \downarrow\downarrow \Rightarrow$ decreix o creix molt ràpid l'exponencial.

$\omega = Im[p_i]$ si $Im[p_i] \uparrow\uparrow \Rightarrow f \uparrow\uparrow \Rightarrow$ tenim una freqüència del cosinus elevada.

Si tenim pols reals, només tindrem exponencial

Si tenim pols imaginaris purs, només tindrem cosinus.

Tenint en compte això, podem veure la forma dels senyals segons l'ubicació dels pols en el pla. Dibuixarem només una part del pla, entenent que tots els que siïn complexes van aparellats amb el seu conjugat.



Anem a estudiar què passa amb cada tipus de pols, en funció del què hem vist a la gràfica.

→ Pols en l'eix real: no tenen part imaginària

* Pol real i negatiu gran:

Ex: $\frac{K}{S+10} \leftrightarrow Ke^{-10t}$

És una exponencial amb ct. de temps petita que decreix ràpid. Com més negatiu, més ràpid decreixerà.

* Pol real i negatiu petit:

Ex: $\frac{K}{S+5} \leftrightarrow Ke^{-5t}$

És una exponencial amb ct. de temps més gran que decreix més lentament. Com més proper a zero més lentament decreixerà

* Pol real a zero:

Ex: $\frac{K}{S} \leftrightarrow K \cdot u(t)$ correspon a un graó

* Pol real positiu petit:

Ex: $\frac{K}{S-5} \leftrightarrow Ke^{5t}$

Serà una exponencial amb ct. de temps gran que creixerà lentament. Com més proper a zero, més lentament creixerà.

* Pol real positiu gran:

Ex: $\frac{K}{S-10} \leftrightarrow K \cdot e^{10t}$

Serà una exponencial amb ct. de temps més petita que creixerà més ràpidament. Com més gran sigui, més ràpid creixerà.

→ Pols complexes conjugats amb part imaginària petita: Ara tindrem una parella de pols conjugats. Tindran la mateixa part real, i la part imaginària canviada de signe. La resposta serà una exponencial deguda a la part real i un cosinus degut a la part imaginària. Si la part imaginària és petita, vol dir que la freqüència del cosinus serà baixa. Si la part real és zero, aleshores tindrem un graó en lloc de l'exponencial.

* Part real negativa i gran: Tindrem un cosinus de freqüència baixa que decreix ràpidament.

* Part real negativa i petita: Tindrem un cosinus de la mateixa freqüència, però que decreix lentament, ja que la constant de temps serà gran.

* Part real zero: Tindrem un cosinus multiplicat per un graó, per tant serà de la mateixa freqüència i serà estable, no creixerà ni decreixerà.

* Part real positiva i petita: Tindrem un cosinus de la mateixa freqüència que creix lentament, ja que ara l'exponencial és positiva (l'exponent) i té constant de temps gran.

* Part real positiva i gran: Tindrem un cosinus de la mateixa freqüència, però que creix ràpidament.

→ Pols complexes conjugats amb part imaginària gran: També tindrem una parella de pols conjugats, i per tant tindrem també una exponencial i un cosinus. Tindrem les mateixes situacions que abans, però ara la freqüència del cosinus serà més elevada.

Veiem però que ara només hem contemplat la resposta lliure, és a dir, que tot això és independent de l'entrada (que després, se sumarà la seva influència a tots aquests valors de la resposta lliure).
Cal tenir en compte també, que podem tenir més pols, per exemple podríem tenir dos parelles de pols complexes conjugats, una parella de pols complexes conjugats i un pol real,...

3.3. ESTABILITAT

Normalment ens interessen els circuits per treure'n algun profit. Nosaltres entrarem alguna informació i voldrem que el circuit en faci alguna cosa (integrar, amplificar, invertir, ...). Podem dir que una gran part dels circuits que ens interessen són processadors de senyals.
Recordem el que hem tractat abans referent a la funció de xarxa:

$Vo(s) = H(s) \cdot Vi(s)$
↳ Resposta forsada
↳ Resposta lliure. Ens vindrà donada pels pols de $H(s)$.

Per aquests tipus de circuits que processen senyals, ens interessarà la resposta forsada (que depèn de l'entrada). La resposta lliure (degut al circuit i condicions inicials), al cap d'un temps serà zero, serà transitòria. Un cop passat aquest temps, quan la resposta lliure s'hagi extingit, només quedarà la forsada, que serà permanent.

Això podrem dir que tindrem la següent correspondència:

RESPOSTA LLIURE ⟶ RÈGIM TRANSITORI

RESPOSTA FORÇADA ⟶ RÈGIM PERMANENT

Hem de tenir en compte que només podrem veure la resposta forçada quan la lliure ja s'hagi exhingit.

Partint de les argumentacions anteriors, podem fer les següents definicions:

CIRCUIT ESTABLE: És aquell circuit en què la resposta lliure s'acaba exhingint. Això vol dir que els pols han d'estar al semipla esquerra. La part real dels pols ha de ser negativa, no pot ser ni positiva ni zero. $Re[p_i] < 0 \ \forall i$

CIRCUIT INESTABLE: És aquell circuit en què la resposta lliure no està acotada, creix infinitament. Això vol dir que hi ha algun pol al semipla dret. Algun pol té la part real positiva (ni negativa ni zero). $Re[p_i] > 0$ per algun i.

CIRCUIT MARGINALMENT ESTABLE: És aquell circuit que la resposta lliure es manté. Això vol dir que té pols al semipla esquerra, però en pot tenir algun a l'eix imaginari (no al semipla dret) $Re[p_i] = 0$ per algun i.

Com que generalment ens interessaran els circuits que processen senyals, doncs necessitarem que siguin estables per poder veure l'efecte que té l'entrada.

El cas marginalment estable tampoc interessa. Mai podríem veure sola la resposta forçada. A més, per alguns casos concrets de senyals d'entrada, la resposta creixeria indefinidament.

Suposem un cas concret:

$$v_o(t) = \int_0^t v_i(t)\,dt \xrightarrow[\text{propietat integració}]{} V_o(s) = \frac{V_i(s)}{s}$$

Amb això la $H(s)$ seria:

$H(s) = \frac{1}{s}$ el pol és 0 ⇒ Marginalment estable.

Si l'entrada fos un graó, faríem la integral i veuríem que la sortida és una recta que creix indefinidament, per tant no seria estable. Si l'entrada fos, per exemple, un cosinus, la sortida seria un sinus i sí que seria estable. Per això diem que és marginalment estable, perquè no sempre ho és.

També cal tenir en compte que, a la pràctica, és molt complicat que la part real del pol sigui exactament zero, amb la qual cosa es pot tornar inestable.

Per tots aquests motius es considera aquest cas a part i només s'utilitzen aquests circuits en comptades ocasions. (oscil·ladors)

Tindrem diverses maneres per veure si un circuit és o no estable:

a) Trobant les arrels del denominador:

Un cop trobada la funció de xarxa, trobem les arrels del denominador i mirem on són els pols. Depenent de la seva ubicació, ja sabrem si el circuit és estable, inestable o marginalment estable.

Si el polinomi té molt grau, pot ser difícil trobar les arrels. Per fer-ho, ens podem ajudar de l'Octave. També hi ha tècniques matemàtiques (com Rufini) que poden ajudar.

b) Per observació del circuit:

Si les variables van creixent, serà perquè al circuit hi ha elements actius que aporten energia.

Si en un circuit només tenim fonts de senyal i elements passius com resistències, bobines o condensadors, el circuit serà estable o, com a molt, marginalment estable (oscil·la), però mai podrà ser inestable.

Si tenim un circuit que, a més, té A.O. o fonts controlades, podrà ser inestable (però no ho ha de ser forsosament), però també pot ser estable o marginalment estable. A priori no podrem assegurar res.

Si R-L o RC ⇒ pols reals i negatius. L i C lanejats ⇒ pols complexes conjugats.

c) Mirant el denominador, però sense calcular les arrels:

Hi ha criteris matemàtics que diuen:

Si $D(s) = s+b$, és estable si $b>0$

Si $D(s) = s^2+bs+c$, és estable si b i $c>0$

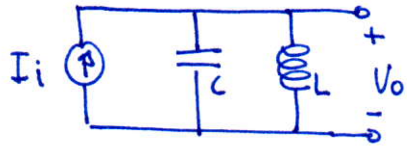
Si $D(s) = s^3+bs^2+cs+d$ és estable si b, c i $d>0$ i $d<b\cdot c$

També es poden utilitzar altres teories, com el criteri de Roth Hurwitz, que ens dóna altres criteris per saber si el circuit és estable sense haver de calcular les arrels.

Veiem alguns exemples perquè tot això quedi més clar.

Exemple:

Suposem el següent circuit:



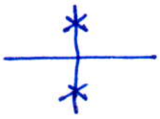
Per calcular la funció de xarxa farem:

$$H(s)=\frac{V_0}{I_i}$$

Com que $V_0=V_i$, veiem que serà el mateix que calcular la impedància d'entrada:

$$H(s)=\frac{Ls\cdot\frac{1}{Cs}}{Ls+\frac{1}{Cs}}=\frac{Ls}{LCs^2+1}=\frac{\frac{1}{C}s}{s^2+\frac{1}{LC}} \rightarrow \text{arrels}: s=\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Veiem que els pols estan en l'eix imaginari:



Això vol dir que és marginalment estable.

Veiem què passa si $L=C=1$ i $I_i=e^{-t}\cdot u(t)$

$$V_0(s)=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{A}{s+j}+\frac{A^*}{s-j}+\frac{B}{s+1}$$

Busquem els residus:

$$A=\frac{s}{(s-j)(s+1)}\Big|_{s=-j}=\frac{-j}{-2j(-j+1)}=\frac{-j}{-2-2j}=\frac{e^{-j90^\circ}}{2\sqrt{2}\,e^{-j135^\circ}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot e^{j45^\circ}$$

$$A^*=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot e^{-j45^\circ}$$

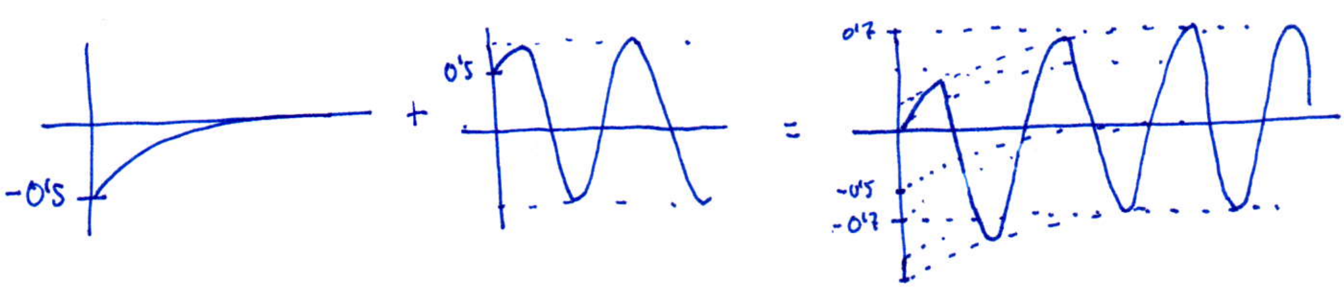
$$B=\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=-1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

$$V_0(s)=\frac{0'35\,e^{j45^\circ}}{s+j}+\frac{0'35\cdot e^{-j45^\circ}}{s-j}-\frac{0'5}{s+1}$$

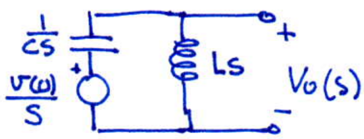
$$V_0(t)=0'35\,e^{j45^\circ}\cdot e^{-jt}+0'35\,e^{-j45^\circ}\cdot e^{jt}-0'5\,e^{-t}=$$

$$=0'35\left(e^{-j(t-45^\circ)}+e^{j(t-45^\circ)}\right)-0'5e^{-t}$$

$$v_0(t)=0'7\cos(t-45^\circ)-0'5\,e^{-t}$$



Veiem que un cop passat el transitori, aquest circuit oscil·la. Si posem condicions inicials al condensador i desconnectem la font, tindríem un oscil·lador.



$$v_0(s) = \frac{Ls}{\frac{1}{cs}+Ls}\cdot\frac{v(0)}{s} = \frac{Ls}{\frac{1}{c}+Ls^2}\cdot v(0) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\cdot v(0)$$

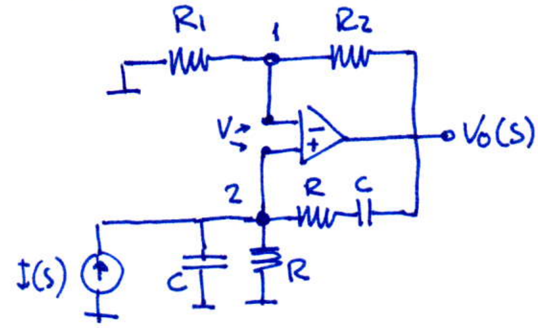
Utilitzant els mateixos valor que alors:

$$V_0(s) = \frac{s}{s^2+1}\cdot v(0) \longleftrightarrow v_0(t) = v(0)\cos t$$

A la realitat no oscil·laria indefinidament, ja que la bobina té pèrdues (passaria el mateix amb un pèndul, que s'acaba parant pel fregament.

EXEMPLE:

Discutir l'estabilitat del següent circuit.



Haurem d'escriure 2 KCL's (als nodes 1 i 2).
No posarem C.I., perquè per discutir l'estabilitat necessitem la funció de xarxa, que no les contempla. L'estabilitat depèn del circuit.

(1) $\rightarrow \frac{V}{R_1} + \frac{V-V_0}{R_2} = 0$ → seria un no inversor amb entrada V.

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V = \frac{V_0}{R_2} \rightarrow V_0 = \underbrace{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}_{K}V = K\cdot V$$

K → de moment n'hi direm K.

(2) $\rightarrow \frac{V}{R} + CsV + \frac{V-V_0}{R+\frac{1}{Cs}} = I(s)$ → Posem que $V_0 = K\cdot V$

$$\frac{V}{R} + CsV + \frac{Cs}{RCs+1}(V-KV) = I(s)$$

Posem denominador comú:

$$\frac{(RCs+1)\cdot V + RCs(RCs+1)\cdot V + RCs(V-KV)}{R(RCs+1)} = I(s)$$

Traiem factor comú V:

$$\frac{(RCs+1) + RCs(RCs+1) + RCs(1-K)}{R(RCs+1)}\cdot V = I(s)$$

Com que $V_0 = K\cdot V$, per trobar la funció de xarxa farem: (posem a $V = \frac{V_0}{K}$)

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{I(s)} = K \frac{R(RCs+1)}{R^2C^2s^2 + RCs + RCs + 1 + RCs - KRCs} =$$

$$= K \frac{R(RCs+1)}{R^2C^2s^2 + RCs(3-K) + 1} = K \frac{R^2C}{R^2C^2} \frac{s + \frac{1}{RC}}{s^2 + \frac{3-K}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}}$$

$$H(s) = \frac{K}{C} \frac{s + \frac{1}{RC}}{s^2 + \underbrace{\frac{3-K}{RC}}_{b}s + \underbrace{\frac{1}{R^2C^2}}_{c}}$$

Segons el què hem vist abans, tots els termes del denominador han de ser positius si volem un circuit estable. Així que:

- Si $K > 3 \rightarrow b < 0 \rightarrow$ inestable
- Si $K < 3 \rightarrow b > 0 \rightarrow$ estable
- Si $K = 3 \rightarrow b = 0 \rightarrow$ marginalment estable

$$\hookrightarrow \frac{\cdots}{s^2 + (\frac{1}{RC})^2} \leftrightarrow \dots \cos(\tfrac{1}{RC}t + \dots)$$

L'estabilitat només depèn del circuit i, matemàticament parlant, només depèn del denominador de la funció de xarxa, però per calcular aquesta, necessitem posar una entrada. Si l'entrada la posem nosaltres, hem de mirar que no afecti al circuit. En aquest cas la $I(s)$ no afecta, però una $V(s)$ faria que R i C fossin superflus.

Depèn de quina funció volguéssim donar al circuit, ens interessaria fer $K < 3$ perquè fos estable. Si ens interessés fer un oscil·lador, hauríem de fer $K = 3$:

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 3 \Rightarrow R_2 = 2R_1$$

Està clar que seria molt difícil que trobéssim exactament aquests valors. Com que al fer l'oscil·lador, a part, hauríem de treure l'entrada i posar condicions inicials als condensadors, si la K acabés sent lleugerament inferior, la resposta s'acabaria extingint. Si la K es fés lleugerament més gran, la resposta aniria creixent i l'A.O es saturaria i la sortida deixaria de ser un cosinus.

Aquest problema tindria solució. Hewlet i Packard van veure fa temps que es podria substituir R_1 per una espècie de bombeta que varia la seva resistència en funció de l'amplitud dels senyals (s'escalfa més o menys).

Aquest efecte serviria per mantenir la sortida sempre amb el mateix valor.
Actualment això es fa amb un transistor FET en mode lineal (es comporta com una resistència que depèn de la tensió). Amb tot plegat s'aconsegueix també controlar el guany.

3.4. ESTUDI DELS TERMES DE SEGON ORDRE

Anem a estudiar amb una mica més de detall, què passa quan tenim polinomis de segon ordre al denominador.
Els polinomis, de moment els hem anat escrivint:

$D(s) = s^2 + bs + c$ → ve determinat per b i c.

↳ Ex: $s^2 + \frac{3-K}{RC}s + \left(\frac{1}{RC}\right)^2$ el de l'exercici anterior.

Però també el podríem mirar d'escriure d'una altra manera:

$D(s) = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$ → ve determinat per ξ (xi) i ω_0.

↳ Ex: pel cas anterior:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$2\xi\omega_0 = \frac{3-K}{RC} \rightarrow 2\xi\frac{1}{RC} = \frac{3-K}{RC} \Rightarrow \xi = \frac{3-K}{2}$$

Veiem que ho podem escriure d'aquesta manera, ara anem a veure si té avantatges fer-ho així:
Trobem les arrels d'aquest polinomi:

$$s = \frac{-2\xi\omega_0 \pm \sqrt{4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\cdot\omega_0$$

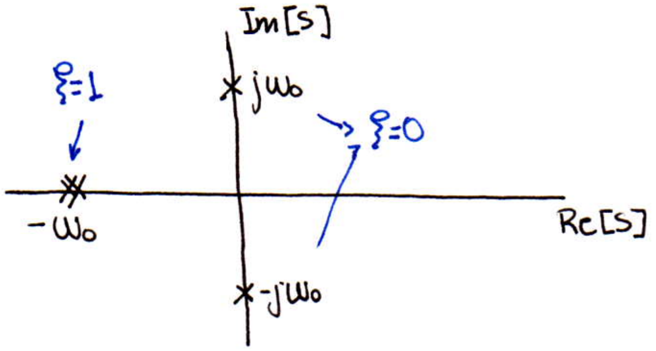
$s = \omega_0\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$ } tindrem arrels reals si $\xi > 1$; tindrem arrels complexes si $\xi < 1$

En el cas que tinguem arrels complexes podrem escriure:

$s = \omega_0\left(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)$ posem la j i posem alguna cosa positiva dins l'arrel.

Dibuixem en un pla com serien aquestes arrels per uns quants valors de ξ. Centrem-nos amb valors entre 0 i 1 per tal que les arrels siguin complexes.

Descobrirem-ho, de moment, per $\xi=0$ i per $\xi=1$.



$\xi=0 \rightarrow s=\pm j\omega_0$

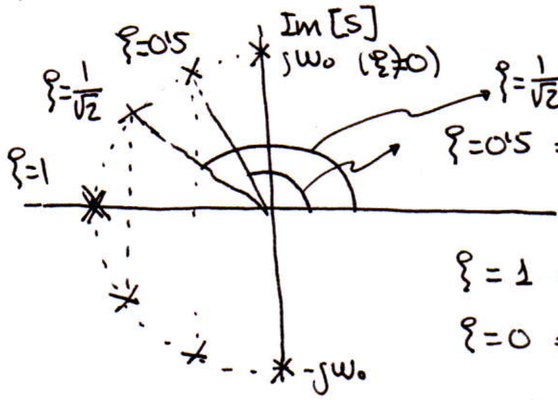
$\xi=1 \rightarrow s=-\omega_0$ (doble)

Estudiem ara el mòdul d'aquestes arrels:

$$|s| = \sqrt{\xi^2\omega_0^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)} = \omega_0$$

Veiem que el mòdul dels pols és igual si no varia ω_0, és independent de la ξ. Això vol dir que en el pla, tots estaran ubicats en un mateix cercle de radi ω_0. Recordem que ω_0^2 era el terme independent del polinomi. Per tant podrem saber de seguida la grandària del cercle on estan els pols.

ξ ens indicarà (està a la part real i estarà a l'exponencial) com de ràpid s'esmorteix el cosinus (l'oscil·lació).



$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ angle $90°+45°=135°$

$\xi=0'5 \Rightarrow$ angle $90°+30°=120°$

$\xi=1 \Rightarrow$ angle $90°+90°=180°$

$\xi=0 \Rightarrow$ angle $90°$

Amb tot això que hem esbrinat, podríem dir que:

- → ξ és el coeficient d'esmorteïment: ens indica com s'esmorteix de ràpid l'oscil·lació ($\xi=0$ no s'esmorteix i com més gran, més ràpid decreix).
- → ω_0 és la freqüència natural. Aquesta seria la pulsació que tindria el cosinus si $\xi=0$.

Veiem ara quina forma tindria la seva transformada inversa:

$$\frac{C}{s-(-\xi\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-\xi^2})} + \frac{C^*}{s-(-\xi\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2})}$$

Sense buscar exactament els residus podem dir que en el temps tindrem:

$$\left[c\cdot e^{-\xi\omega_0 t}\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}+c^* e^{-\xi\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}\right]\cdot u(t)$$

$$|c|\, e^{-\xi\omega_0 t}\left[e^{j(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi)}+e^{-j(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi)}\right] u(t)$$

$$2\cdot|c|\cdot e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\cos\left[\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi\right]\cdot u(t)$$

Veiem que a l'exponencial apareix també ω_0, però un cop fixada aquesta (és a dir, estem en un cercle determinat), la ξ ens dirà bàsicament l'esmorteïment.
Veiem que ξ també surt al cosinus, però ω_0 seria la freqüència si no hi hagués esmorteïment.

Ens interessarà sobretot que $\xi<1$, perquè així els pols seran complexes. Si la $\xi>1$, recordem que aleshores els pols serien reals i ja no tindríem aquesta expressió que acabem d'escriure.

Recordem que en un cosinus, per exemple:

$\cos(2\pi\cdot10^3 t+33°)$

↳ No puc posar en graus, però si opero amb calculadora o amb octave, ho hauria de passar a radiants

↳ Això sempre està en radiants, per això, per operar, convé que la fase també ho estigui.

3.5. RESPOSTA EN RÈGIM PERMANENT. EXCITACIONS CONSTANTS

Recordem primer el procés que hem seguit per saber què era el règim permanent.

Hem comentat que ens interessen els circuits que processen senyals, per tant volem veure a la sortida l'entrada processada. Per això vam veure que trobàvem la funció de xarxa, que era la relació entre l'entrada i la sortida. La funció de xarxa no tenia les c.i., perquè aquestes s'acaben extingint si el circuit és estable (pols al semipla esquerra).

Quan, a partir de la funció de xarxa i una entrada determinada, busquem la sortida, tindrem una resposta lliure (deguda al circuit) i una resposta forçada (deguda a l'entrada). En aquesta situació, la resposta lliure donarà lloc al règim transitori, que si el circuit és estable dura molt poc; i la resposta forçada dóna lloc al règim permanent, que podrem veure de manera aïllada quan el transitori s'extingeixi.

A partir dels pols, podrem saber si el circuit és estable i la forma que té el transitori.

De moment anem a estudiar què passa si donada una $H(s)$ hi entrem una excitació constant (en concret un graó).

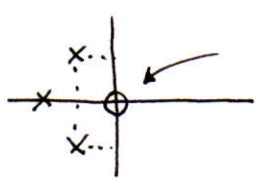
$$V_o(s) = H(s)\cdot\frac{1}{s} = \underbrace{\frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}}_{\text{Resposta lliure, que si és estable, dóna lloc al transitori.}} + \underbrace{\frac{A}{s}}_{\text{resposta forçada, que dóna lloc al permanent i ens interessa.}}$$

Si només ens interessa trobar el règim permanent, només ens caldrà trobar el residu A, els altres no ens caldran. Amb el procés que seguim sempre per trobar els residus, veiem que tindrem:

$$A = H(0) \Rightarrow v_o(t) = H(0)\cdot u(t)$$

Així doncs veiem que el valor que pren la funció de xarxa per $s=0$, ens dóna l'amplitud del graó que tindrem a la sortida en règim permanent.

Ens n'adonem doncs que si $H(0)=0$, ens desapareix la sortida en règim permanent.



Mirant el diagrama de pols i zeros veiem que aquest cas es donarà quan tinguem un zero de la funció de xarxa a l'origen.

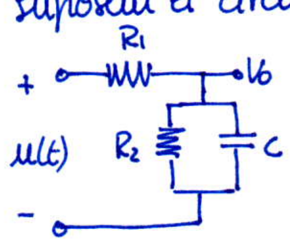
Veiem doncs que aquest valor de A ens ve donat en funció de s (en concret quan val zero) i no del temps. Com que L i C són els únics elements que depenen de s, podem intentar descobrir-ho mirant directament al circuit.

$\frac{1}{Cs}$ si $s=0 \Rightarrow$ c.o ($z=\infty$) $\qquad$ Ls si $s=0 \Rightarrow$ c.c. ($z=0$)

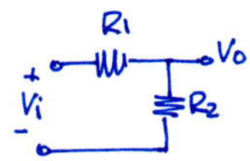
Així, amb excitacions constants, la $H(0)$ la podríem trobar substituint L i C en el circuit per c.c. i c.o respectivament, i trobant la sortida per entrada graó.

<u>Exemple</u>:

Suposem el circuit:



En règim permanent i excitacions constants fem $C \to$ c.o.
Busquem la sortida si l'entrada és $u(t)$.



$V_o = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot u(t)$

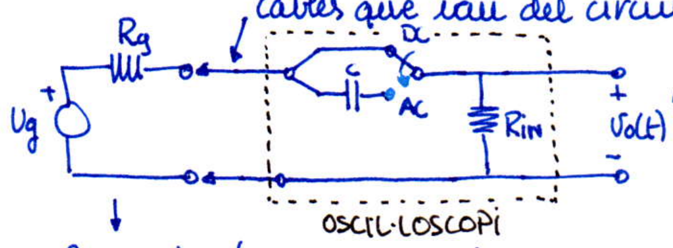
$H(0) = \frac{R_2}{R_1+R_2}$

Si ens interessa el transitori haurem de buscar $H(s)$. Si només ens interessa el permanent ho podem buscar així.

Veurem uns quants exemples del tema.

EXEMPLE 1: OSCIL·LOSCOPI: POSICIÓ AC I DC

Recordem que a l'oscil·loscopi podem fer mesures en AC i DC. Veurem com quedaria el circuit al fer-les:



$R_{IN} = 1M\Omega$ (molt gran)
$C = 1\mu F$

Mirem què passa en cada posició:

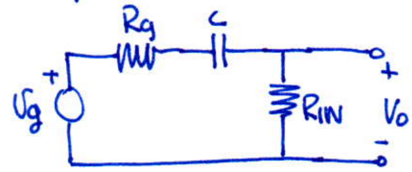
→ Posició DC:

$$V_o(t) = \frac{R_{IN}}{R_{IN}+R_g}\cdot V_g \qquad \text{Normalment } R_{IN} \gg R_g \Rightarrow V_o \approx V_g$$

Si al circuit hi tinguéssim resistències molt altes, la sortida la veuríem alterada.

→ Posició AC:

En aquest cas el circuit equivalent que tindríem serà:

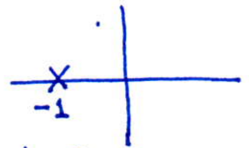


La funció de xarxa serà:

$$H(s) = \frac{R_{IN}}{R_{IN}+R_g+\frac{1}{Cs}} = \frac{R_{IN}\cdot Cs}{(R_{IN}+R_g)\cdot Cs+1}$$

$$H(s) = \underbrace{\frac{R_{IN}\cdot C}{(R_{IN}+R_g)\cdot C}}_{\approx 1 \text{ si } R_{IN}\gg R_g}\cdot\frac{s}{s+\underbrace{\frac{1}{(R_{IN}+R_g)C}}_{\text{despreciable}}} \approx \frac{s}{s+\frac{1}{R_{IN}C}}$$

Si $R_{IN} = 1M\Omega$ i $C = 1\mu F \Rightarrow R_{IN}\cdot C = 10^6\cdot 10^{-6} = 1 \Rightarrow$

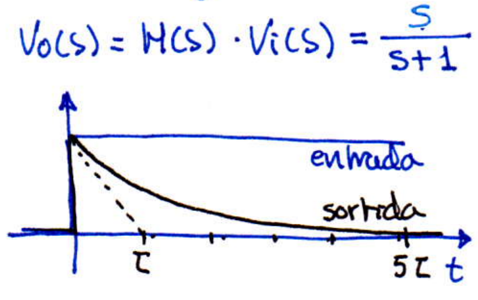


Veiem que la resposta lliure té un pol a -1. Això implica una sortida exponencial de $\tau = 1$seg.

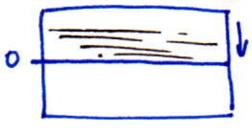
Veurem què passaria per diferents entrades.

- Entrada graó:

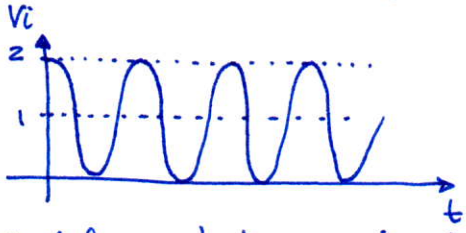
$$V_o(s) = H(s)\cdot V_i(s) = \frac{s}{s+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} \leftrightarrow v_o(t) = e^{-t}\cdot u(t)$$



Veiem que aquest condensador ens ha tret la contínua, però tardarem 5seg a veure el zero. Baixarà poc a poc. Veurem ratlles que van baixant.



• Entrada sinusoïdal amb contínua:



$$v_g(t) = [1 + \cos 1000t]\, u(t)$$

$$V_g(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+10^6}$$

Així la sortida seria (recuperem la funció de xarxa que hem trobat abans):

$$V_o(s) = \frac{s}{s+1}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+10^6}\right] = \frac{\cancel{s}}{s+1}\cdot\frac{s^2+10^6+s^2}{\cancel{s}(s^2+10^6)} = \frac{2s^2+10^6}{(s+1)(s^2+10^6)}$$

$$V_o(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-j10^3} + \frac{B^*}{s+j10^3}$$

Busquem els residus:

$$A = \left.\frac{2s^2+10^6}{s^2+10^6}\right|_{s=-1} \simeq 1$$

$$B = \left.\frac{2s^2+10^6}{(s+1)(s+j10^3)}\right|_{s=+j10^3} = \frac{-2\cdot10^6+10^6}{\underbrace{(j\cdot10^3+1)}_{\approx j10^3}(j\cdot10^3+j10^3)} \simeq \frac{-10^6}{-2\cdot10^6} \approx \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{j0^\circ}$$

$$B^* = \frac{1}{2}e^{j0^\circ}$$

Així en el temps tindrem:

$$v_o(t) = \left[e^{-t} + \frac{1}{2}e^{j10^3t} + \frac{1}{2}e^{-j10^3t}\right]u(t)$$

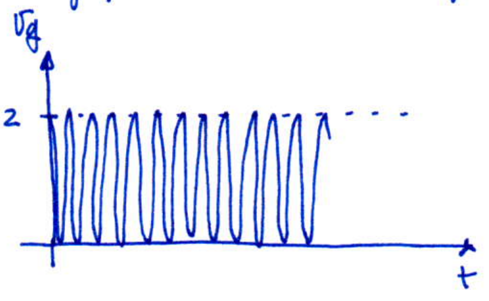
$$v_o(t) = \left[e^{-t} + \cos 1000t\right]u(t)$$

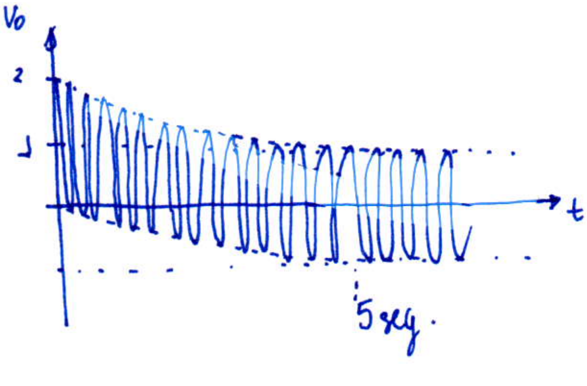
↓ això ja és el què ens sortia amb l'entrada graó.

Abans de dibuixar-ho, mirem quin és el període d'aquest cosinus:

$$\cos 2\pi f t = \cos\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 1000 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1000} = 6'21\,\text{mseg}$$

L'exponencial té $\tau = 1$seg, per tant, amb els 5 seg que tardarà a agafar el seu valor final, hi cabem molts cicles del cosinus.

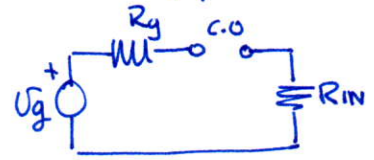




Al cap dels 5 seg veuríem només el cosinus, sense la component contínua. Per tant veiem que en posició AC, el condensador el què fa és treure la contínua i visualitzar el senyal altern.

Com que és un circuit lineal, podríem estudiar els dos senyals per separat ($u(t)$ i $\cos \omega t$) i després aplicar superposició.

Centrem-nos en el graó, i mirem què fa el circuit en contínua (és a dir, per $s=0$).



$C \to C.O$

Ja veiem que no deixa passar el graó, i només passaria el cosinus (tot i que hauríem d'estudiar amb detall què fa).

Inspeccionant el circuit, podríem veure doncs que no deixa passar la contínua, ja que $H(0)=0$. Per tant, si l'entrada és constant, no hi haurà sortida.

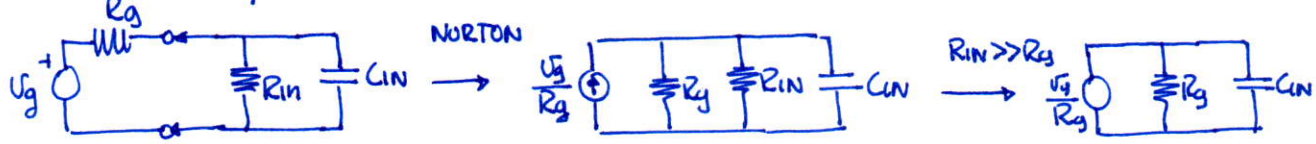
EXEMPLE: OSCIL·LOSCOPI: SONDA DE BAIXA CAPACITAT

En utilitzar l'oscil·loscopi en mode DC, al fer mesures, s'acaba introduint una capacitat C_{IN} en paral·lel a R_{IN}. També passa que el cable que utilitzem per fer mesures, també té una capacitat.

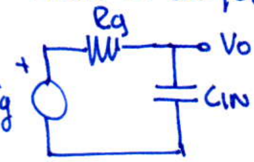
$R_{IN} = 1M\Omega$, $C_{IN} = 30pF$

$C_c = 100pF/m$. Si el cable té un metre de llargada: $C_c = 100pF$.

De moment considerem només la capacitat que introdueix l'oscil·loscopi, i veiem com afecta:



Tornem a la forma Thevenin i ja podrem analitzar fàcilment:



$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{\frac{1}{C_{IN} \cdot s}}{R_g + \frac{1}{C_{IN} s}} = \frac{1}{R_g C_{IN} \cdot s + 1}$$

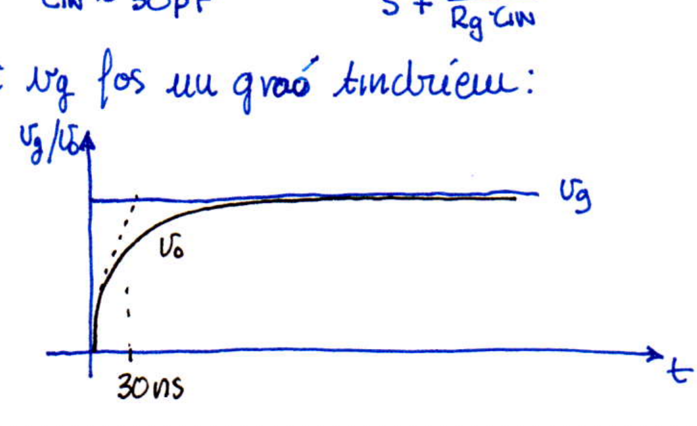
Si no comptem el cable tindríem això

Si tenim una entrada graó, el seu residu corresponent seria $H(0)$ que en aquest cas concret val 1.

Si $R_G \sim 1K\Omega$, $C_{IN} \sim 30pF$

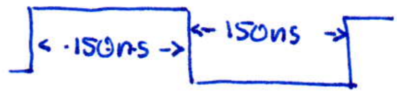
$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_g \cdot C_{IN}}}{s + \frac{1}{R_g C_{IN}}} \to \tau = R_g \cdot C_{IN} = 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-12} = 30ns$$

Si v_g fos un graó tindríem:

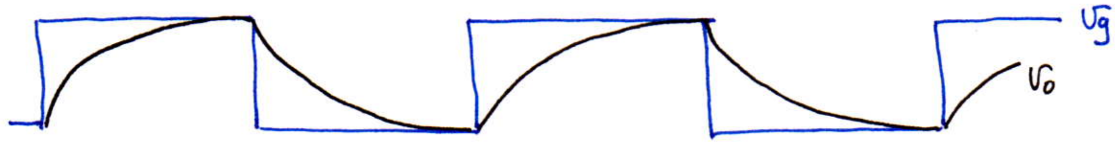


Com que τ és molt petita, de seguida veuríem el graó i no ho apreciaríem. Si ens interessés la transició, no la veuríem bé.

Veiem ara que veuríem si l'entrada fos un senyal quadrat de freqüència 3'3 MHz:

$f = 3'3 \cdot 10^6 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3'3 \cdot 10^6} = 300 \text{ ns} \Rightarrow$ 

Veiem que cadascun dels polsos tindria una durada de 150ns. Recordem que τ valia 30ns i per tant s'extingiria als 150ns, per tant el què visualitzaríem ara seria:

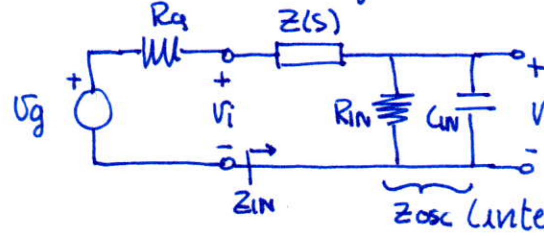


Podem comprovar que aquest senyal no el veuríem gens bé, i això que, teòricament, l'oscil·loscopi pot visualitzar senyals de fins a 60 MHz.

Veurem que amb una sonda de baixa capacitat, podem millorar la visualització d'aquest senyal.

Ens interessaria fer τ més petita, però aquesta depèn de C_{IN} que és intern a l'oscil·loscopi i no ho podem tocar. En lloc d'utilitzar cables normals, utilitzarem una sonda d'impedància $Z(s)$. Després veurem com ens interessaria que fos $Z(s)$.

Ara tindríem el següent circuit:



De fet, tot això passa perquè Z_{IN} no és gran. Si ho fos, veuríem V_g a V_o (si fos un c.o, $V_i = V_g$). Mirarem de fer Z_{IN} gran també.

Calculem primer Z_{osc}:

$$Z_{osc}(s) = \frac{R_{IN} \cdot \frac{1}{C_{IN} \cdot s}}{R_{IN} + \frac{1}{C_{IN} \cdot s}} = \frac{R_{IN}}{R_{IN} \cdot C_{IN}\, s + 1}$$

Ara anem a calcular la relació V_o/V_i (compte que de moment no agafem V_g, volem veure que V_o tingui la mateixa forma que V_i):

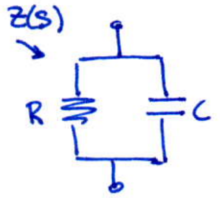
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_{osc}(s)}{Z(s) + Z_{osc}(s)} = \frac{\frac{R_{IN}}{R_{IN} C_{IN} \cdot s + 1}}{Z(s) + \frac{R_{IN}}{R_{IN} \cdot C_{IN} \cdot s + 1}} = \frac{R_{IN}}{Z(s)\,[R_{IN} C_{IN} \cdot s + 1] + R_{IN}}$$

No podrem trobar una $Z(s)$ que faci que la sortida sigui igual que l'entrada, però podem intentar que sigui constant, és a dir, que no depengui de s i no ens faci canviar la forma.

Per tal que marxi la s ens interessarà que $z(s)$ tingui la següent forma:

$$Z(s) = \frac{a}{bs+1}$$ per un determinat b, aconseguiríem que desaparegués el terme en s de l'expressió de $H(s)$.

Veiem que aquesta impedància té la mateixa forma que Z_{osc}, de manera que la podrem construir de la mateixa manera, fent el paral·lel d'una resistència i un condensador.



$$Z(S) = \frac{R \cdot \frac{1}{CS}}{R + \frac{1}{CS}} = \frac{R}{RCS+1}$$

Si volem fer desaparèixer la s de l'expressió de $H(s)$, haurem de fer $RC = R_{IN} \cdot C_{IN}$, de tal manera que:

$$H(S) = \frac{R_{IN}}{\frac{R}{\cancel{RCS+1}} \cdot \cancel{[R_{IN}C_{IN}S+1]} + R_{IN}} = \frac{R_{IN}}{R + R_{IN}}$$

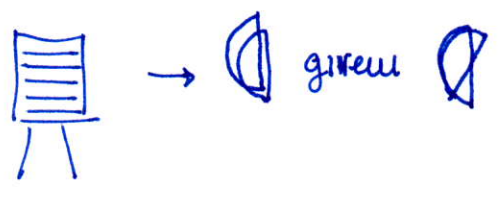
Si ara fem, per exemple, $R = 9R_{IN}$ ($9M\Omega$) i, per tant, $C = C_{IN}/9$, tindrem:

$$H(S) = \frac{R_{IN}}{9R_{IN} + R_{IN}} = \frac{1}{10}$$

Tindrem així una sonda que atenua per 10, però com que ho sabem, no serà cap problema.

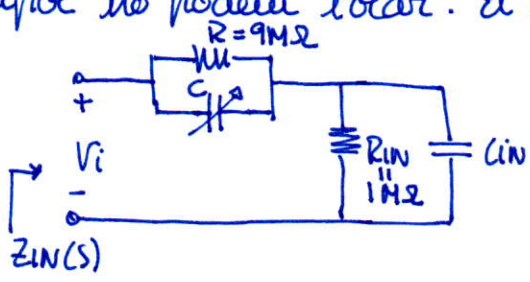
Les R_{IN} sempre valen $1M\Omega$ en tots els oscil·loscopis, per tant farem $R = 9M\Omega$ en la sonda, però la C_{IN} varia segons oscil·loscopis. Sabem que és petita, però no sabem exactament quant val. Per tant, les sondes es construeixen amb un condensador variable.

Un condensador es construeix a base de plaques paral·leles. Si són semicirculars, les podem girar i farem variar la capacitat.



La sonda seria:

Hem vist de moment que v_o és com v_i, però atenuada. Si ho sabem, ja ho tindrem en compte pels nostres càlculs. Ara hem de veure si Z_{IN} és gran, de manera que v_i s'assemblaria més a v_g. També s'aconseguiria si R_g fos petita, però això depèn del circuit, i tampoc ho podem tocar. El circuit seria ara:



calculem $Z_{IN}(s)$ i mirem com és:

$$Z_{IN}(S) = Z(S) + Z_{osc}(S)$$

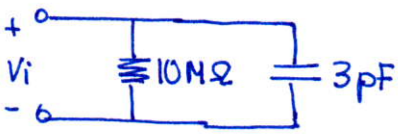
$$Z_{IN}(S) = \frac{R}{RCS+1} + \frac{R_{IN}}{R_{IN} \cdot C_{IN} \cdot S+1} = \frac{R+R_{IN}}{R_{IN} C_{IN} S+1} = \frac{10\, R_{IN}}{R_{IN} C_{IN} S+1}$$

$RC = R_{IN} C_{IN}$ $\qquad$ $R = 9 R_{IN}$

Per tant veiem que la impedància d'entrada és ara 10 vegades més gran que abans. Això vol dir que:

$$Z_{IN}(S) = Z_{osc}(S) \cdot 10 \Rightarrow \begin{array}{l} R_{eq} = 10 \cdot R_{IN} \\ C_{eq} = C_{IN}/10 \end{array}$$

Quan ara hi connectem el circuit, tindrem com a circuit equivalent de l'oscil·loscopi:



Recordem que la ct. de temps era:

$\tau = R_g \cdot C_{IN} = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-12} = 3ns$

Si el circuit que mesurem té la mateixa R_g, la τ és ara 10 vegades més petita, per tant podríem veure el senyal 10 vegades millor, o veure igual un senyal de freqüència 10 vegades superior (33 MHz).

Lògicament, si visualitzem un senyal que pertany a un circuit amb R_g petita (generador, sortida d'un A.O, ...), podríem veure bé els senyals a freqüències superiors.

Existeixen també sondes que atenuen per 20 o per més.

Hi ha sondes que tenen més impedància d'entrada i que se'n diuen actives, perquè contenen al seu interior elements actius (com un transistor FET per exemple), però són molt cares (10.000 €).